جامعة البعث   امتحانات الدورة الأضافية (مرسوم) لعام ٢٠١٥-٢٠١٦   المدة : ساعة ونصف
كلية العلوم   أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)   العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات   لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي   الاسم :

السؤال الأول (١٥درجة):

-أثبت أن كل مجموعة محدودة $M \subset E^n$ شبه متراصة (في حالة كان E حقيقي فقط) .

السؤال الثاني (١٠+١٥= ٢٥ درجة) :

١)- إذا كانت $M \subset L_p[a,b]$ حيث $1 \le p < \infty$ مجموعة جزئية من $L_p[a,b]$ اذكر الشروط كي تكون M شبه متراصة .(ذكر الشروط فقط) .

٢)- إذا كان $A_1 : X \to Y$ و $A_2 : X \to Y$ مؤثرين متراصين فإن $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ متراص وذلك أياً كان العددان α_1, α_2 .

السؤال الثالث (٢٠درجة) :

إذا كان $A : X \to X$ مؤثر متراص حيث X فضاء خطي منظم عندئذٍ من أجل كل قيمة $\lambda \neq 0$ يوجد m بحيث يكون $X = N(A-\lambda I)^m \oplus R(A-\lambda I)^m$.

السؤال الرابع (٥+٥+٥=١٥ درجة) :

ليكن A مؤثراً خطياً حيث $A : D(A) \to H$ و $D(A)$ كثيفة في H أثبت الآتي:

1. $D(A^*)$ فضاء خطي جزئي في H ، A^* مؤثر خطي .
2. A^* مؤثر مغلق .
3. إذا كان $A \subset B$ فإن $A^* \supset B^*$.

السؤال الخامس (١٠+١٥= ٢٥ درجة) :

١)- ليكن $A : B \to B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء باناخ في نفسه أثبت أنه إذا كان A^{-1} موجوداً ينتمي إلى $L(B,B)$ فعندئذٍ $\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \; ; \; \lambda \in \sigma(A) \right\}$.

٢)- عرف ما يلي : تظيم هيلبرت شميث للمؤثر A ، المؤثر الموجب ، شكل الثنائي الخطية .

انتهت الأسئلة   مدرس المقرر

حمص في ٣٠/ ٨ / ٢٠١٦م.   مع التمنيات بالنجاح والتوفيق   الدكتور سامح العرجة

جامعة البعث	سلم تصحيح مقرر التحليل التابعي (٢)	المدة : ساعة ونصف
كلية العلوم	لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات	امتحانات الدورة الأضافية للعام ٢٠١٥-٢٠١٦	

جواب السؤال الأول (١٥ درجة):

(في حال كان E حقيقي) : بما أن E^n فضاء خطي ذو n بعد فتوجد قاعدة

مكونة من n عنصر وهي $u_1, u_2, \dots, u_n$ وبالتالي $\forall u \in E^n$ فإنه توجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ بحيث

$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ ويكون $\|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ، وبالتالي من أجل أي عنصر

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ يوجد $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \in E^n$ ، لنأخذ التطبيق :

$$\varphi : E^n \to R^n : u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \mapsto \varphi(u) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x$$

فنجد أن هذا التطبيق :

2 **معرف تماماً :** لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ بحيث

$u = v$ فإن $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$ وبالمطابقة نجد أن

$i = 1, 2 \dots n \ , \ x_i = y_i$ وبالتالي $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ أي أن $\varphi(u) = \varphi(v)$ وبالتالي

تحقق الاقتضاء : $u = v \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(v)$ فالتطبيق φ معرف تماماً .

2 **خطي :** لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ ومهما يكن

$\lambda, \mu \in R$ فإن :

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi(\lambda x_1 u_1 + \lambda x_2 u_2 + \dots + \lambda x_n u_n + \mu y_1 u_1 + \mu y_2 u_2 + \dots + \mu y_n u_n) \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi\{(\lambda x_1 + \mu y_1) u_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2) u_2 + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) u_n\} \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\mu y_1, \mu y_2, \dots, \mu y_n) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$$

فالتطبيق خطي أي أن

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$$

2 **يحافظ على النظيم :** لأن $\|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{R^n} = \|\varphi(u)\|_{R^n}$.

2 **متباين :** لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ بحيث

$\varphi(u) = \varphi(v)$ فإن $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ وبالتالي $i = 1, 2 \dots n \ , \ x_i = y_i$ ومنه

وبالتالي $x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n=y_1u_1+y_2u_2+...+y_nu_n$ وبالتالي $u=v$ وبالتالي تحقق الاقتضاء :

$\varphi(u)=\varphi(v) \Rightarrow u=v$ فالتطبيق φ متباين .

غامر : لأنه من أجل أي عنصر $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ يوجد عنصر $u=x_1u_1+x_2u_2+...+x_nu_n\in E^n$ بحيث $\varphi(u)=x$. مما سبق نجد أن التطبيق φ إيزومورفيزم من E^n في R^n .

الآن ، لتكن $E^n\supset M$ مجموعة محدودة ولنثبت أنها شبه متراصة ، لتكن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر M عندئذٍ يكون $u^N=\alpha_1^Nu_1+\alpha_2^Nu_2+...+\alpha_n^Nu_n$ من أجل $N=1,2,...$ حيث $N=1,2,...$, $j=1,2,...,n$, $\alpha_j^N\in R$ وبما أن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ عناصر من المجموعة المحدودة M فإن $N=1,2,...$, $\|u^N\|_{E^n}<c$, $\exists c>0$ ولكن $\|u^N\|_{E^n}=\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ وبالتالي $\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}<c$ وبالتالي $|\alpha_j^N|\le\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}<c$ أي ان $|\alpha_j^N|<c$ وذلك أياً كان $N=1,2,...$ و $j=1,2,...,n$ أي أن المتتالية العددية $\{\alpha_j^N\}_{N=1}^{\infty}$ محدودة في R وذلك أياً كان $j=1,2,...,n$ وحسب مبرهنة فإن هذه المتتالية تملك متتالية جزئية متقاربة ولتكن $\{\alpha_j^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ولتكن α_j^0 نهاية هذه المتتالية أي أن $\lim_{k\to\infty}\alpha_j^{N_k}=\alpha_j^0$ وبالتالي توجد في المتتالية الاختيارية $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ التي أخذناها في البداية من المجموعة M متتالية جزئية هي $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $u^{N_k}=\alpha_1^{N_k}u_1+\alpha_2^{N_k}u_2+...+\alpha_n^{N_k}u_n$ من أجل $k=1,2,...$ وهي متقاربة من العنصر :

$$\lim_{k\to\infty}u^{N_k}=\lim_{k\to\infty}(\alpha_1^{N_k}u_1+\alpha_2^{N_k}u_2+...+\alpha_n^{N_k}u_n)=$$

$$=(\lim_{k\to\infty}\alpha_1^{N_k})u_1+(\lim_{k\to\infty}\alpha_2^{N_k})u_2+...+(\lim_{k\to\infty}\alpha_n^{N_k})u_n=\alpha_1^0u_1+\alpha_2^0u_2+...+\alpha_n^0u_n=u^0$$

أي أن : $\lim_{k\to\infty}u^{N_k}=u^0$ فالمتتالية $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة ، وبالتالي M شبه متراصة وهو المطلوب .

جواب السؤال الثاني (١٠+١٥=٢٥ درجة):

١)- إذا كانت $L_p[a,b]\supset M$ حيث $1\le p<\infty$ مجموعة جزئية من $L_p[a,b]$ عندئذٍ تكون M شبه متراصة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

1. M محدودة بانتظام ، أي أنه يوجد عدد $c>0$ بحيث $\|f\|_{L_p[a,b]}<c$ أياً كان $f\in M$.

2. أن تكون توابع المجموعة M مستمرة بنفس الدرجة .

- في حال كان $p=2$ (نحصل على $L_2[a,b]$ وهو فضاء هيلبرت) عندئذٍ نعلم أن :

$f,g \in L_2[a,b] \quad : \quad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ وكل تابع $f \in L_2[a,b]$ يكتب على الشكل :

$f=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n$ حيث $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ قاعدة كثيفة متعامدة نظامية تامة في $L_2[a,b]$.

5

(٢) – لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة في X وبما أن A_1 متراص فتوجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون $\{A_1x_{n_k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة في Y ، كذلك بما أن A_2 متراص توجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون $\{A_2x_{n_k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة في Y وبالتالي توجد المتتالية $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}=\{x_{n_k}^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}\cap\{x_{n_k}^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون $\{(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2)x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة وذلك لأن :

5

5

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2)x_{n_k}=\alpha_1\lim_{k\to\infty}A_1(x_{n_k})+\alpha_2\lim_{k\to\infty}A_2(x_{n_k})=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2=y$$

5

إذن $\alpha_1A_1+\alpha_2A_2$ متراص وهو المطلوب .

جواب السؤال الثالث (٢٠درجة):

لنرمز $R_m=R(A-\lambda I)^m \quad , \quad N_m=N(A-\lambda I)^m$ وليكن $x\in X$ عنصراً اختيارياً فإن العنصر $z=(A-\lambda I)^m x\in R_m=R_{2m}$ وبالتالي $z\in R_{2m}$ أي يوجد $x_1\in X$ بحيث $z=(A-\lambda I)^{2m}x_1$ ولنأخذ $x_0=(A-\lambda I)^m x_1\in R_m$ وويكون عندئذٍ :

5

$$(A-\lambda I)^m x_0=(A-\lambda I)^{2m}x_1=z=(A-\lambda I)^m x$$

وبالتالي $(A-\lambda I)^m(x-x_0)=0$ وهذا يعني أن $x-x_0\in N_m$ وبالتالي :

$$x=x-x_0+x_0 \quad , \quad x-x_0\in N_m \quad , \quad x_0\in R_m$$

5

بقي أن نثبت أن هذا التمثيل وحيد :

نفرض وجود تمثيل آخر $x=x-u_0+u_0 \quad , \quad x-u_0\in N_m \quad , \quad u_0\in R_m$ وبالتالي $v_0=x_0-u_0\in R_m$ وبالتالي $v\in X \quad , \quad v_0=(A-\lambda I)^m v$ كما أن

5

$$v_0=x_0-u_0=(x-u_0)-(x-x_0) \;\Rightarrow\; v_0\in N_m$$

$$(A-\lambda I)^m v_0=0 \;\Rightarrow\; (A-\lambda I)^{2m}v=(A-\lambda I)^m v_0=0$$

وبالتالي $v\in N_{2m}=N_m$ وبالتالي $v_0=(A-\lambda I)^m v=0$ ومنه $x_0=u_0$ فالتمثيل وحيد .

5

إذاً $X=N(A-\lambda I)^m\oplus R(A-\lambda I)^m$ وهو المطلوب .

جواب السؤال الرابع (٥+٥+٥=١٥ درجة):

1. ليكن $y_1, y_2 \in D(A^*)$ وليكن $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ ولنثبت أن $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in D(A^*)$ ، ليكن عنصراً اختيارياً $x \in D(A^*)$ عندئذٍ :

$$\langle Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \overline{\alpha_1}\langle Ax, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2}\langle Ax, y_2 \rangle = \overline{\alpha_1}\langle x, y_1^* \rangle + \overline{\alpha_2}\langle x, y_2^* \rangle =$$

$$= \overline{\alpha_1}\langle x, A^* y_1 \rangle + \overline{\alpha_2}\langle x, A^* y_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 A^* y_1 \rangle + \langle x, \alpha_2 A^* y_2 \rangle = \langle x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \rangle \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in D(A^*)$$

إن المؤثر A^* خطي لأن :

$$\langle x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \rangle = \langle Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \overline{\alpha_1}\langle Ax, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2}\langle Ax, y_2 \rangle =$$
$$\overline{\alpha_1}\langle x, A^* y_1 \rangle + \overline{\alpha_2}\langle x, A^* y_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 A^* y_1 \rangle + \langle x, \alpha_2 A^* y_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2 \rangle \Rightarrow$$
$$A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^* y_1 + \alpha_2 A^* y_2$$

2. لتكن $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A^*)$ متتالية اختيارية من $D(A^*)$ بحيث يكون $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ وبحيث يكون $A^* x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ وبالتالي فإن :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle Ax, \lim_{n\to\infty} y_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, A^* y_n \rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} A^* y_n \rangle = \langle x, z \rangle$$

وبالتالي $y \in D(A^*)$ ، $z = A^* y$ وبالتالي A^* مؤثر مغلق .

3. بما أن $A \subset B$ فإن $D(A) \subset D(B)$ و $Ax = Bx \quad \forall x \in D(A)$ وكون $D(A)$ كثيفة في H فإن $D(B)$ كثيفة في H (لأنها تحوي مجموعة كثيفة) وبالتالي يمكننا الحصول على B^* بالشكل :

$$\forall x \in D(A) \ , \ \forall y \in D(B^*) \Rightarrow \langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle = \langle x, B^* y \rangle \Rightarrow$$

$$y \in D(A^*) \quad \& \quad A^* y = B^* y$$

$$D(B^*) \subset D(A^*) \quad \Rightarrow \quad B^* \subset A^*$$

جواب السؤال الخامس (١٠+١٥=٢٥ درجة):

١)- بما أن A^{-1} موجود وخطي ومحدود عندئذٍ فإن $\lambda = 0 \notin \sigma(A)$ وبالتالي كل عدد $\lambda \in \sigma(A)$ يمكن كتابته بالشكل $\lambda = \frac{1}{\mu}$ حيث μ عدد مناسب ومغاير للصفر .

لنثبت صحة التكافؤ : $\mu \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1})$

بفرض $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1})$ ⇔ موجود $\left(A^{-1} - \frac{1}{\mu} I\right)^{-1}$ ⇔ موجود $\left(-\frac{1}{\mu} A^{-1}(A - \mu I)\right)^{-1}$ ⇔ موجود $-\mu A(A-\mu I)^{-1}$ ⇔ موجود $(A-\mu I)^{-1}$ ⇔ موجود ومحدود ومعرف على كل الفضاء B ⇔ $\mu \notin \sigma(A)$ وبالتالي التكافؤ $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1})$ ⇔ $\mu \notin \sigma(A)$ صحيح وبالتالي التكافؤ التالي صحيح $\frac{1}{\mu} \in \sigma(A^{-1})$ ⇔ $\mu \in \sigma(A)$ وهو المطلوب .

5

5

٢)

- ليكن H فضاء هيلبرت و A مؤثر خطي ومحدود و $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ قاعدتين و $\langle Au_n, v_m \rangle$ عوامل فورييه لـ Au_n بالنسبة للقاعدة $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ ولنفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle Au_n, v_m\rangle|^2 < \infty$ وحسب مساواة بارسيفال $\|Au_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}|\langle Au_n, v_m\rangle|^2$

ندعو العدد $N(A) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Au_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle Au_n, v_m\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ **بنظيم هيلبرت شميث** للمؤثر A

5

- **(المؤثر الموجب) :** ليكن A مؤثر خطي ومحدود ومترافق ذاتياً عندئذٍ نقول إن A مؤثر موجب ونكتب بالتعريف $A \geq 0$ إذا كان $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ وذلك أياً كان $x \in H$.

5

- **(شكل ثنائي الخطية) :** ليكن $L: H \times H \to C : (x,y) \mapsto L(x,y)$ ندعو L شكلاً ثنائيَّ الخطية إذا كان من أجل أي $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ وأي $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in H$ يتحقق الشرطان :

5

1. $L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 L(x_1, y) + \lambda_2 L(x_2, y)$.
2. $L(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \overline{\mu_1} L(x, y_1) + \overline{\mu_2} L(x, y_2)$.

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

الدكتور سامح العرجة

حمص في ٣٠ / ٨ / ٢٠١٦ م.